# Dilatación lineal.

**Objetivo:**

Calcular el coeficiente de dilatación lineal de dos barras de material distinto y desconocido y cualificar los materiales.

**Introducción:**

*Calor y temperatura:*

*Ley cero de la termodinámica.*

Sean tres cuerpos con temperaturas distintas, la ley cero de la termodinámica indica que si al menos uno de ellos está en contacto con los dos pero no los tres al mismo tiempo, entonces los cuerpos tienden al equilibrio térmico.

*Expansión térmica.*

La expansión térmica se da cuando se le aplica calor a un cuerpo. En ese momento sus moléculas se excitan y se expanden, conllevando a que el cuerpo se expanda.

*Expansión lineal.*

Suponga que una varilla de material tiene longitud $l_o$ a una temperatura inicial $T_o$. Si la temperatura cambia en $\Delta T$, la longitud cambia en $\Delta l$. Experimentalmente se observa que a medida que crece $T$ $l$ aumenta, por lo tanto $\Delta T$ es directamente proporcional a $\Delta l$. Por otra parte, si dos varillas del mismo material tienen el mismo cambio de temperatura, pero una es dos veces más larga que la otra, su cambio de longitud también será del doble. Por lo tanto, $\Delta l$ también debe ser proporcional a $l_o$ . Así pues

$$\Delta l = \alpha l_o \Delta T$$

Donde $\alpha$ es el coeficiente de dilatación térmica.

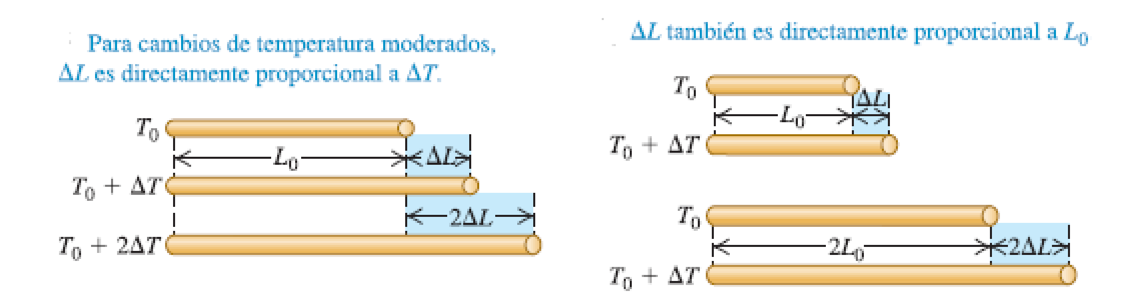



Figura 1: En en la primer pareja de barras observamos el cambio de $l_0$ al aplicarse calor, y en las segundas vemos el principio de proporcionalidad de $\Delta l$ con $l_o$

Si un cuerpo tiene longitud $l_o$ a la temperatura $T_o$, su longitud $l$ a la temperatura $T = T_o + \Delta T$ es

$$l = l_o + \Delta l = l_o + \alpha l_o \Delta T = l_o(1 + \alpha \Delta T)$$

| Material | $\alpha$ [$K^{-1}$ o $(C°)^{-1}$] |
|---|---|
| Aluminio | $2.4 \times 10^{-5}$ |
| Latón | $2.0 \times 10^{-5}$ |
| Cobre | $1.7 \times 10^{-5}$ |
| Vidrio | $0.4–0.9 \times 10^{-5}$ |
| Invar (aleación níquel-hierro) | $0.09 \times 10^{-5}$ |
| Cuarzo (fundido) | $0.04 \times 10^{-5}$ |
| Acero | $1.2 \times 10^{-5}$ |

Figura 2: Tabla con algunos valores del coeficiente de dilatación lineal para ciertos metales.

*Dilatómetro.*

El dilatómetro es un dispositivo que consiste de un tubo el cual se somete a un flujo de vapor interno . En extremo del tubo muestra queda fijo a una punta de contacto , y el otro extremo queda hacia un tornillo micrométrico, que al ponerse en contacto con la muestra cierra un circuito que enciende una bombilla (opcional). Además se le acopla un termómetro para detectar la temperatura.

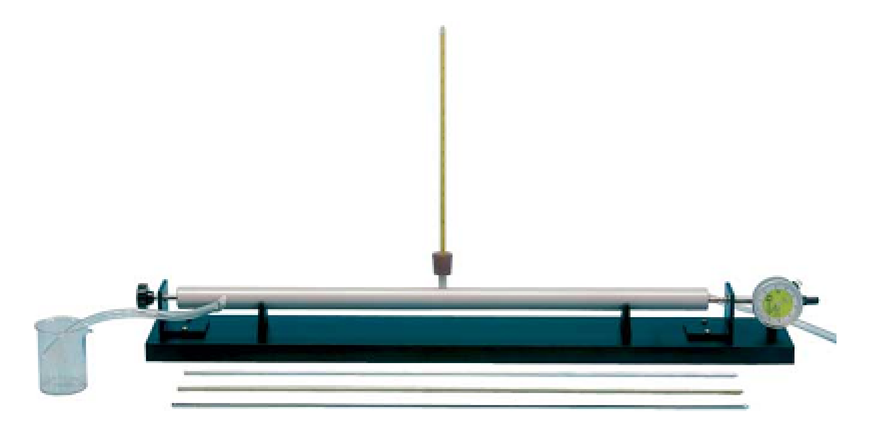


Figura 3: Dilatómetro.

**Materiales:**

1. Agua.
2. Flexó-metro.
3. Parrilla eléctrica.
4. Mangueras de latex.
5. Plastilina.
6. Matraz con boquilla para manguera de latex (Tamaño opcional).
7. Multímetro.
8. Dilatómetro.

**Arreglo experimental:**

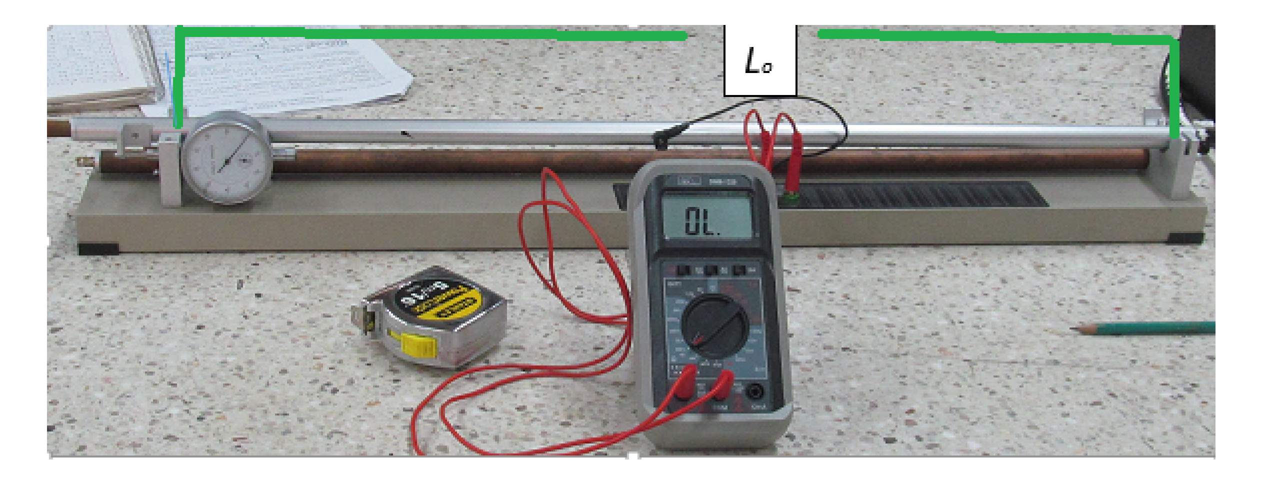



Figura 4: Dilatómetro utilizado en el laboratorio.



Figura 5: Tornillo micrométrico que utiliza el dilatómetro.



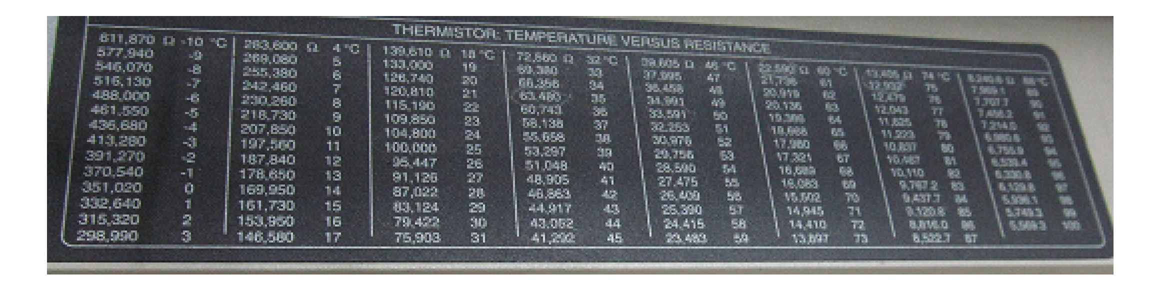
Figura 6: Parrilla con su recipiente al cual se le conecta una manguera de latex y ésta al dilatómetro para hacer pasar un flujo de vapor en el interior del tubo a a analizar.



Figura 7: Matraz con boquilla para manguera de latex.




Figura 8: Multímetro para medir la escala en oms.



THERMISTOR: TEMPERATURE VERSUS RESISTANCE

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 611,870 Ω | -10 °C | 283,600 Ω | 4 °C | 139,610 Ω | 18 °C | 72,560 Ω | 32 °C | 39,605 Ω | 46 °C | 22,590 Ω | 60 °C | 13,405 Ω | 74 °C | 8,240.6 Ω | 88 °C |
| 577,940 | -9 | 269,080 | 5 | 133,000 | 19 | 69,380 | 33 | 37,995 | 47 | 21,736 | 61 | 12,932 | 75 | 7,969.1 | 89 |
| 546,070 | -8 | 255,380 | 6 | 126,740 | 20 | 66,356 | 34 | 36,458 | 48 | 20,919 | 62 | 12,479 | 76 | 7,707.7 | 90 |
| 516,130 | -7 | 242,460 | 7 | 120,810 | 21 | 63,480 | 35 | 34,991 | 49 | 20,136 | 63 | 12,043 | 77 | 7,456.2 | 91 |
| 488,000 | -6 | 230,260 | 8 | 115,190 | 22 | 60,743 | 36 | 33,591 | 50 | 19,386 | 64 | 11,625 | 78 | 7,214.0 | 92 |
| 461,550 | -5 | 218,730 | 9 | 109,850 | 23 | 58,138 | 37 | 32,253 | 51 | 18,668 | 65 | 11,223 | 79 | 6,980.6 | 93 |
| 436,680 | -4 | 207,850 | 10 | 104,800 | 24 | 55,658 | 38 | 30,976 | 52 | 17,980 | 66 | 10,837 | 80 | 6,755.9 | 94 |
| 413,280 | -3 | 197,560 | 11 | 100,000 | 25 | 53,297 | 39 | 29,756 | 53 | 17,321 | 67 | 10,467 | 81 | 6,539.4 | 95 |
| 391,270 | -2 | 187,840 | 12 | 95,447 | 26 | 51,048 | 40 | 28,590 | 54 | 16,689 | 68 | 10,110 | 82 | 6,330.8 | 96 |
| 370,540 | -1 | 178,650 | 13 | 91,126 | 27 | 48,905 | 41 | 27,475 | 55 | 16,083 | 69 | 9,767.2 | 83 | 6,129.8 | 97 |
| 351,020 | 0 | 169,950 | 14 | 87,022 | 28 | 46,863 | 42 | 26,409 | 56 | 15,502 | 70 | 9,437.7 | 84 | 5,936.1 | 98 |
| 332,640 | 1 | 161,730 | 15 | 83,124 | 29 | 44,917 | 43 | 25,390 | 57 | 14,945 | 71 | 9,120.8 | 85 | 5,749.3 | 99 |
| 315,320 | 2 | 153,950 | 16 | 79,422 | 30 | 43,052 | 44 | 24,415 | 58 | 14,410 | 72 | 8,816.0 | 86 | 5,569.3 | 100 |
| 298,990 | 3 | 146,580 | 17 | 75,903 | 31 | 41,292 | 45 | 23,483 | 59 | 13,897 | 73 | 8,522.7 | 87 | | |

Figura 9: Escala de temperatura contra resistencia.

**Procedimiento:**

1. Ensamblar el equipo como aparece en el arreglo experimental.
2. Antes de encender la parrilla, empleando el flexómetro, medir el parámetro inicial $l_o$ a la temperatura ambiente $T_o$
3. Ajustar las puntas en contacto de manera que el tornillo micrométrico esté en cero.
4. Correr el tornillo micrométrico para dejar dilatar libremente la muestra.
5. Encender la parrilla y dejar calentar hasta la temperatura de ebullición del agua. Nota: No encender la parrilla sin antes haber vertido agua dentro de ella a un nivel de tres cuartos del recipiente.
6. Una vez que llegue hasta la temperatura de ebullición del agua, dejar que pierda calor, de forma que el multímetro calculará la resistencia a la que se encuentra. Con esos datos medir la elongación marcada por el tornillo micrométrico y hacer la conversión de la resistencia que marca el multímetro a la escala temperatura a utilizar.
7. Llenar la tabla y hacer la gráfica de $\Delta l$ contra $\Delta T$ y ajustar para encontrar $\alpha$.

**Análisis de una muestra de aluminio.**

*Parámetros:*

$$T_o = 17°C$$
$$L_o = 0{,}7m$$

*Tabla 1*

| N | Ω (oms) | $T$ °$C$ | $\Delta T = T - T_o$ °$C$ | $\Delta L$ (m) | $\Delta TL_o$ ($m$°$C$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 13.7 | 73.5 | 56.5 | 0.0012 | 39,55 |
| 2 | 14.2 | 72.8 | 55.8 | 0.00105 | 39,06 |
| 3 | 15.1 | 70.4 | 53.4 | 0.001 | 37,38 |
| 4 | 16 | 69 | 52 | 0.00095 | 36,4 |
| 5 | 17 | 67 | 50 | 0.0009 | 35 |
| 6 | 18.6 | 65 | 48 | 0.00085 | 33,6 |
| 7 | 20 | 63.1 | 46.1 | 0.0008 | 32,27 |
| 8 | 21.5 | 61.2 | 44.2 | 0.00075 | 30,94 |
| 9 | 23.4 | 59 | 42 | 0.0007 | 29,4 |
| 10 | 25.3 | 57 | 40 | 0.00065 | 28 |
| 11 | 27.8 | 55.4 | 38.4 | 0.0006 | 26,88 |
| 12 | 30.6 | 52 | 35 | 0.00055 | 24,5 |
| 13 | 34.4 | 49.8 | 32.8 | 0.0005 | 22,96 |
| 14 | 38.6 | 46.8 | 29.8 | 0.00045 | 20,86 |
| 15 | 43.7 | 43.6 | 26.6 | 0.0004 | 18,62 |
| 16 | 49.6 | 40.8 | 23.8 | 0.0003 | 16,66 |
| 17 | 58.7 | 36.7 | 19.7 | 0.00029 | 13,79 |
| 18 | 75 | 32 | 15 | 0.0002 | 10,5 |

*Tabla 2.*

| N | $\Delta TL_o$ ($m$°$C$) | $\Delta L$ (m) |
|---|---|---|
| 1 | 39,55 | 0.0012 |
| 2 | 39,06 | 0.00105 |
| 3 | 37,38 | 0.001 |
| 4 | 36,4 | 0.00095 |
| 5 | 35 | 0.0009 |
| 6 | 33,6 | 0.00085 |
| 7 | 32,27 | 0.0008 |
| 8 | 30,94 | 0.00075 |
| 9 | 29,4 | 0.0007 |
| 10 | 28 | 0.00065 |
| 11 | 26,88 | 0.0006 |
| 12 | 24,5 | 0.00055 |
| 13 | 22,96 | 0.0005 |
| 14 | 20,86 | 0.00045 |
| 15 | 18,62 | 0.0004 |
| 16 | 16,66 | 0.0003 |
| 17 | 13,79 | 0.00029 |
| 18 | 10,5 | 0.0002 |

De la tabla anterior identificamos a $x_i$ como $\Delta TL_o$ ($m$°$C$) y a $y_i$ como $\Delta L$ (m), para obtener una pareja de datos $(x_i, y_i) = ((\Delta TL_o)_i, \Delta L_i)$ y de ésta forma tener una dispersión de datos para obtener un modelo matemático que mejor se ajuste a la curva obtenida por la dispersión.

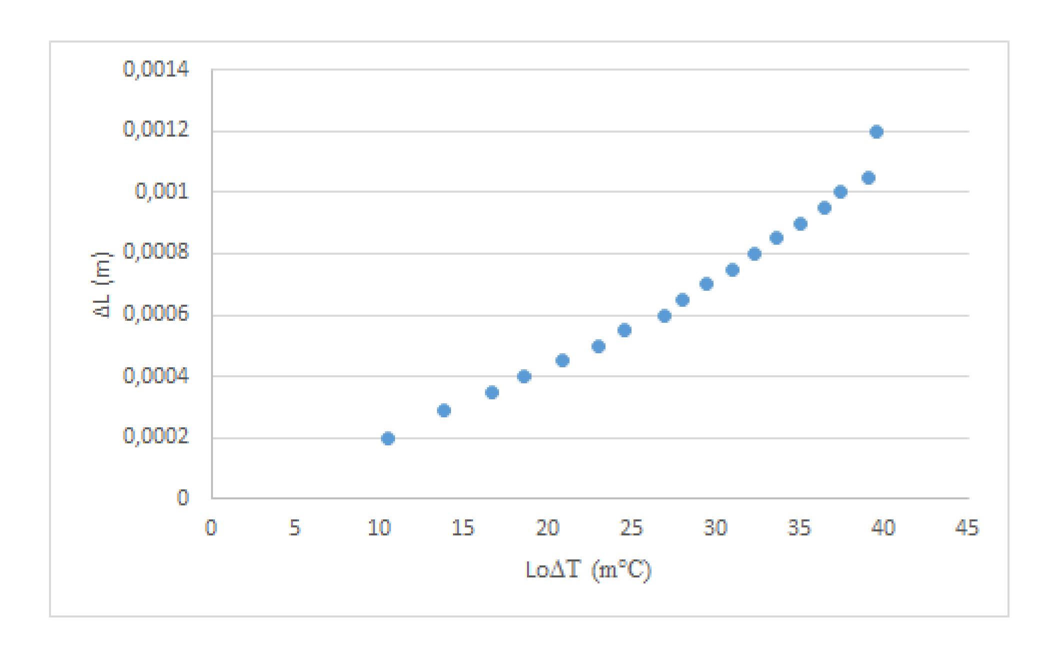



Figura 10: Dispersión de datos de $\Delta L(m)$ contra $\Delta T L_o$ $(m°C)$

De la dispersión anterior podemos trazar una curva como se muestra en la figura 11.

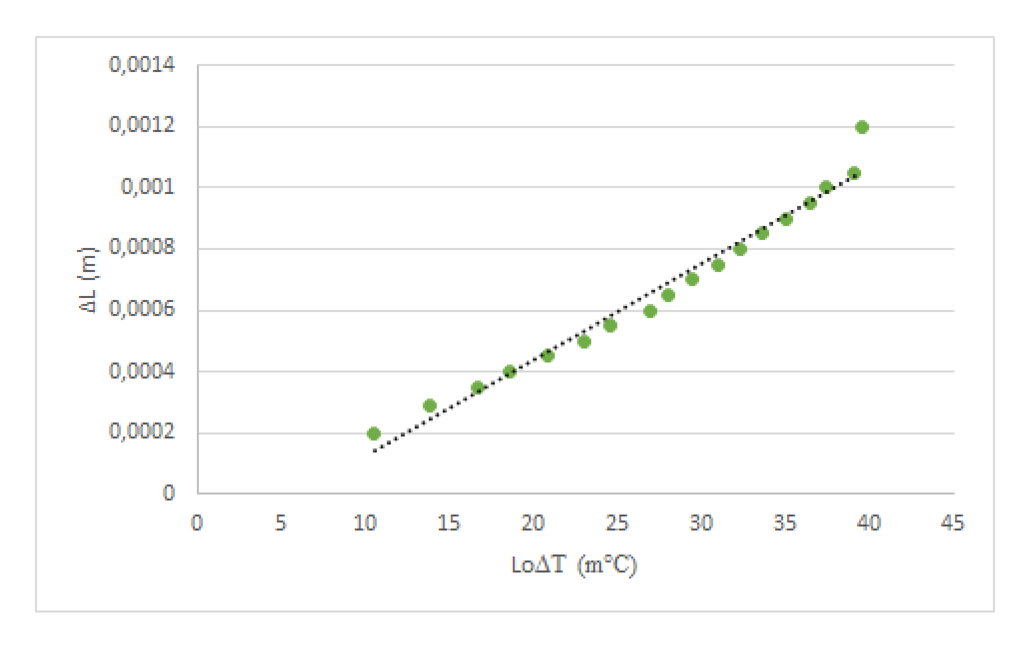



Figura 11: Curva de ajuste trazada al gráfico de dispersión de datos de $\Delta L(m)$ contra $\Delta T L_o$ $(m°C)$

En base a la curva de la figura 11, podemos establecer un modelo matemático de una función lineal de la forma

$$\Delta L = a(\Delta T L_o)_i + b$$

Y posteriormente hallar las constantes $a$ y $b$.

**Regresión lineal por el método de mínimos cuadrados.**

Dada la pareja de datos $((\Delta T L_o)_i, \Delta L_i)$ , tenemos la siguiente tabla de entradas que nos servirá para aplicar la regresión lineal por el método de mínimos cuadrados.

*Tabla 3:tabla de entradas primera parte*

| N | $\sum_{i=1}^{n}(\Delta T L_o)_i(m°C)$ | $\sum_{i=1}^{n}(\Delta T L_o)_i^2(m°C)^2$ | $(\sum_{i=1}^{n}(\Delta T L_o)_i)^2(m°C)^2$ |
|---|---|---|---|
| 18 | 496.37 | 15022.8267 | 246383.1769 |

*Tabla 4: tabla de entradas segunda parte*

| $\sum_{i=1}^{n} \Delta L_i(m)$ | $\sum_{i=1}^{n} \Delta L_i(\Delta T L_o)_i \ (m^2 \ °C)$ |
|---|---|
| 0.01219 | 0.3781421 |

Haciendo uso del método por mínimos cuadrados:

$$\Delta = N\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$$

$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{N\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{N\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

Sustituyendo:

$\Delta = 24027{,}7037 \ m^2 \ °C \ ^2$

$a = 3{,}14 \times 10^{-5} \ °C \ ^{-1}$

$b = 2{,}5371 \times 10^{-4} \ (m)$

La constante $a$ indica al coeficiente de dilatación térmica del aluminio.

Así, la ecuación obtenida es

$$\Delta L = 3{,}14 \times 10^{-5} L_o \Delta T - 2{,}5371 \times 10^{-4}$$

Y ésta es la ecuación que describe El cambio de longitud conforme cambia el tiempo en un tubo de aluminio.

El coeficiente de dilatación teórico para el aluminio es de $2{,}4 \times 10^{-5}\ °C^{\ -1}$
Según el dato anterior , podemos obtener el error porcentual de la estimación en el experimento. Para ello, haremos uso de la formula para calcular el error porcentual que es

$$e\,\% = \frac{V_{real} - V_{exp}}{V_{real}} \times 100$$

Sustituyendo valores

$$e\,\% = \frac{3{,}14 \times 10^{-5} - 2{,}4 \times 10^{-5}}{2{,}4 \times 10^{-5}} \times 100 = 30{,}833\,\%$$

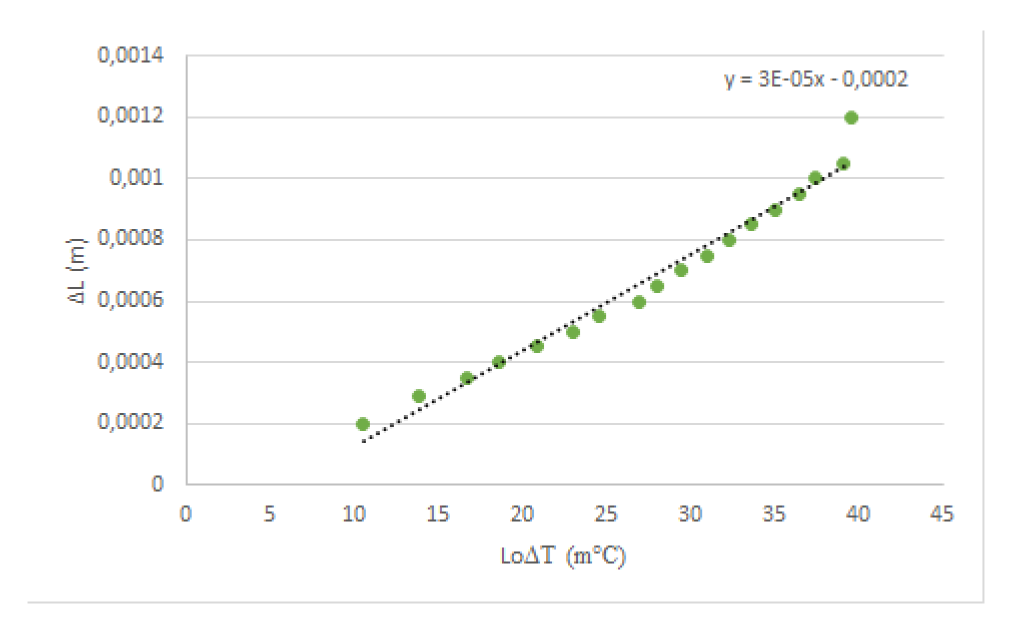



Figura 12: regresión lineal de $\Delta L(m)$ contra $\Delta T L_o$ $(m°C)$

Con respecto a la ecuación que Excel provee y la ecuación obtenida por el método de mínimos cuadrados cabe decir que erran en proporción de unidades dando así una estimación precisa ambas ecuaciones del valor real refiriendo al valor del coeficiente de dilatación lineal del aluminio.

**Análisis de una muestra de cobre.**

*Parámetros:*

$$T_o = 17°C$$
$$L_o = 0{,}7m$$

*Tabla 3*

| N | $\Omega$ (oms) | $T$ °$C$ | $\Delta T = T - T_o$ °$C$ | $\Delta L$ (m) | $\Delta T L_o$ ($m$°$C$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 12.3 | 76.6 | 59.6 | 0.0009 | 41.72 |
| 2 | 13.1 | 74.8 | 57.8 | 0.0008 | 40.46 |
| 3 | 16.1 | 69 | 52 | 0.0007 | 36.4 |
| 4 | 17.4 | 67 | 50 | 0.00065 | 35 |
| 5 | 19.6 | 63.9 | 46.9 | 0.0006 | 32.83 |
| 6 | 21.8 | 61 | 44 | 0.00055 | 30.8 |
| 7 | 25.3 | 57.4 | 40.4 | 0.0005 | 28.28 |
| 8 | 29.5 | 53.6 | 36.6 | 0.00045 | 25.62 |
| 9 | 33.7 | 50 | 33 | 0.0004 | 23.1 |
| 10 | 39.9 | 46 | 29 | 0.00035 | 20.3 |
| 11 | 45.6 | 42.8 | 25.8 | 0.0003 | 18.06 |
| 12 | 54.2 | 38.8 | 21.8 | 0.00025 | 15.26 |
| 13 | 64.2 | 34.7 | 17.7 | 0.0002 | 12.39 |
| 14 | 78.4 | 30.2 | 13.2 | 0.00015 | 9.24 |

*Tabla 4.*

| N | $\Delta T L_o$ ($m$°$C$) | $\Delta L$ (m) |
|---|---|---|
| 1 | 41.72 | 0.0009 |
| 2 | 40.46 | 0.0008 |
| 3 | 36.4 | 0.0007 |
| 4 | 35 | 0.00065 |
| 5 | 32.83 | 0.0006 |
| 6 | 30.8 | 0.00055 |
| 7 | 28.28 | 0.0005 |
| 8 | 25.62 | 0.00045 |
| 9 | 23.1 | 0.0004 |
| 10 | 20.3 | 0.00035 |
| 11 | 18.06 | 0.0003 |
| 12 | 15.26 | 0.00025 |
| 13 | 12.39 | 0.0002 |
| 14 | 9.24 | 0.00015 |

De la tabla anterior identificamos a $x_i$ como $\Delta T L_o$ ($m$°$C$) y a $y_i$ como $\Delta L$ (m), para obtener una pareja de datos $(x_i, y_i) = ((\Delta T L_o)_i, \Delta L_i)$ y de ésta forma tener una dispersión de datos para obtener un modelo matemático que mejor se ajuste a la curva obtenida por la dispersión.

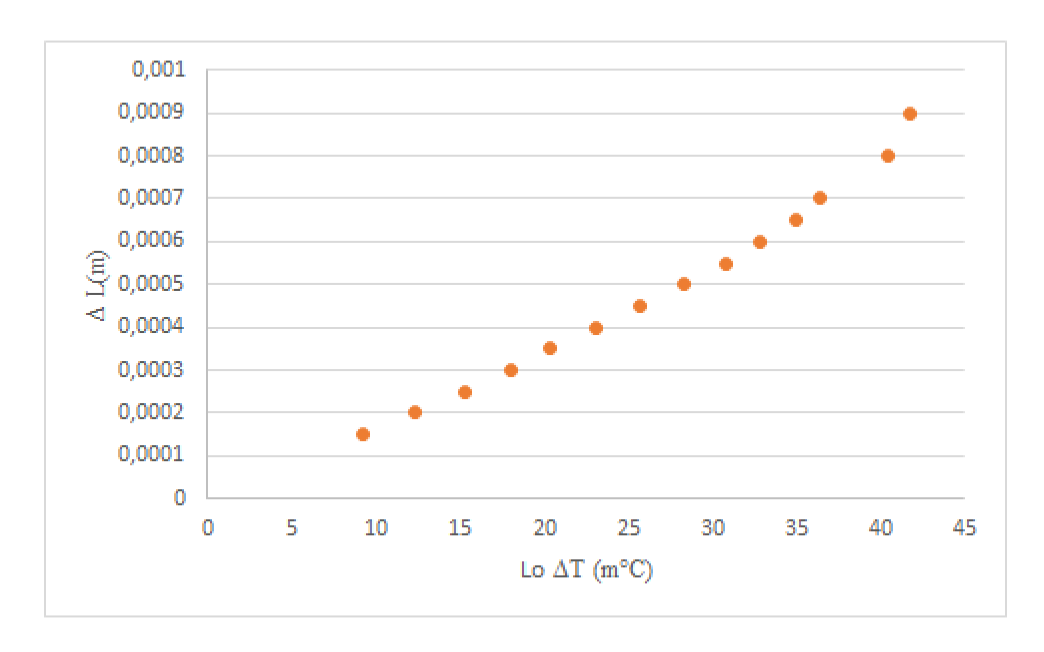



Figura 13: Dispersión de datos de $\Delta L(m)$ contra $\Delta T L_o$ $(m°C)$

De la dispersión anterior podemos trazar una curva como se muestra en la figura 14.

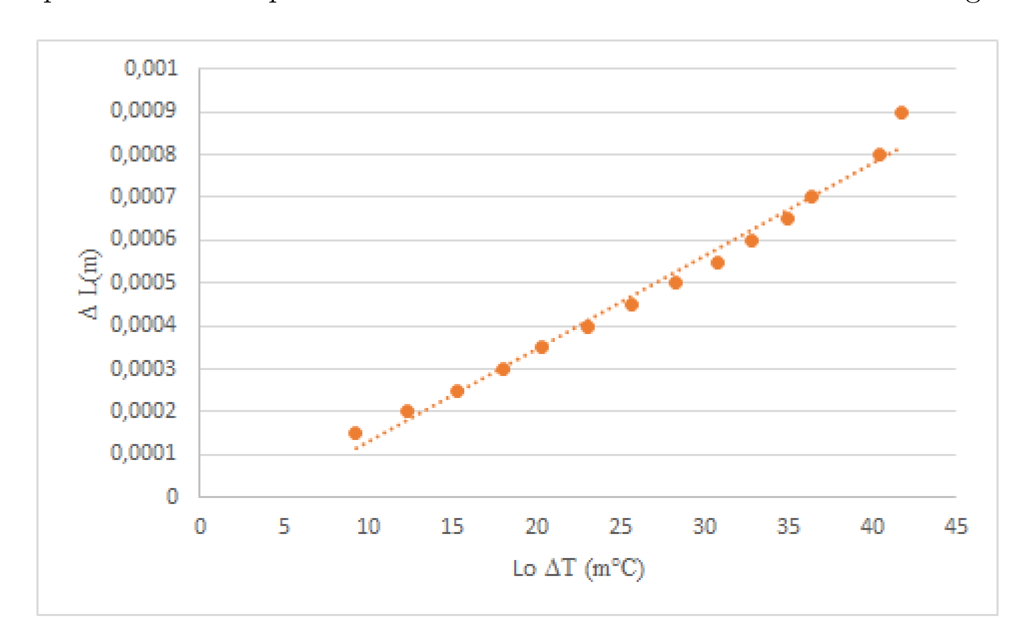



Figura 14: Curva de ajuste trazada al gráfico de dispersión de datos de $\Delta L(m)$ contra $\Delta T L_o$ $(m°C)$

En base a la curva de la figura 14, podemos establecer un modelo matemático de una función lineal de la forma

$$\Delta L = a(\Delta T L_o)_i + b$$

Y posteriormente hallar las constantes $a$ y $b$.

**Regresión lineal por el método de mínimos cuadrados.**

Dada la pareja de datos $((\Delta TL_o)_i, \Delta L_i)$ , tenemos la siguiente tabla de entradas que nos servirá para aplicar la regresión lineal por el método de mínimos cuadrados.

*Tabla 5:tabla de entradas primera parte*

| N | $\sum_{i=1}^{n}(\Delta TL_o)_i(m°C)$ | $\sum_{i=1}^{n}(\Delta TL_o)_i^2(m°C)^2$ | $(\sum_{i=1}^{n}(\Delta TL_o)_i)^2(m°C)^2$ |
|---|---|---|---|
| 14 | 369,46 | 11153,7426 | 136500,6916 |

*Tabla 6: tabla de entradas segunda parte*

| $\sum_{i=1}^{n}\Delta L_i(m)$ | $\sum_{i=1}^{n}\Delta L_i(\Delta TL_o)_i\ (m^2\ °C)$ |
|---|---|
| 0,0068 | 0,209895 |

Haciendo uso del método por mínimos cuadrados:

$$\Delta = N\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$$

$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{N\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{N\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

Sustituyendo:

$\Delta = 136500{,}6916\ m^2\ °C\ ^2$

$a = 1{,}9975 \times 10^{-5}\ °C\ ^{-1}$

$b = -9{,}0034 \times 10^{-5}\ (m)$

La constante $a$ indica al coeficiente de dilatación térmica del aluminio.

Así, la ecuación obtenida es

$$\Delta L = 1{,}9975 \times 10^{-5} L_o \Delta T - 9{,}0034 \times 10^{-5}$$

Y ésta es la ecuación que describe El cambio de longitud conforme cambia el tiempo en un tubo de aluminio.

El coeficiente de dilatación teórico para el aluminio es de $2{,}4 \times 10^{-5}\ {}^{\circ}C^{\ -1}$
Según el dato anterior , podemos obtener el error porcentual de la estimación en el experimento. Para ello, haremos uso de la formula para calcular el error porcentual que es

$$e\,\% = \frac{V_{real} - V_{exp}}{V_{real}} \times 100$$

Sustituyendo valores

$$e\,\% = \frac{1{,}9975 \times 10^{-5} - 1{,}7 \times 10^{-5}}{1{,}7 \times 10^{-5}} \times 100 = 17{,}5\,\%$$

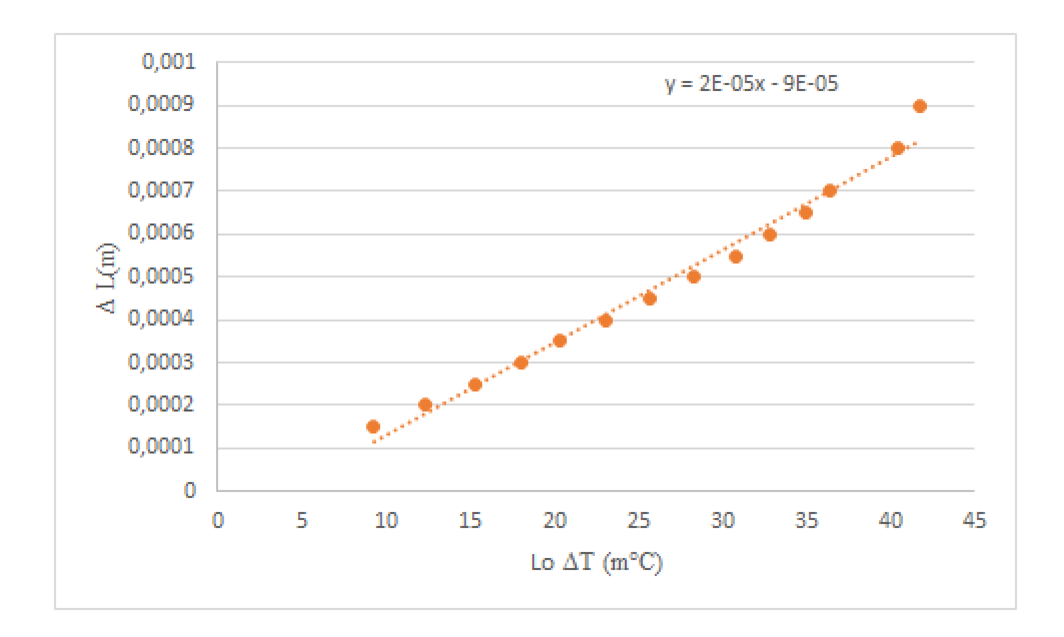



Figura 15: regresión lineal de $\Delta L(m)$ contra $\Delta T L_o$ $(m {}^{\circ}C)$

Con respecto a la ecuación que Excel provee y la ecuación obtenida por el método de mínimos cuadrados cabe decir que erran en proporción de unidades dando así una estimación precisa ambas ecuaciones del valor real refiriendo al valor del coeficiente de dilatación lineal del cobre.

**Discusión:**

Tomando en cuenta todos los datos, nos damos cuente que una vez alcanzada una temperatura muy alta y si la hacemos descender, los valores de $\Delta L$ decrecen, eso lo podemos ver en la figura 16 , ya que la recta que de valores es creciente a proporción directa de los aumentos de temperatura.

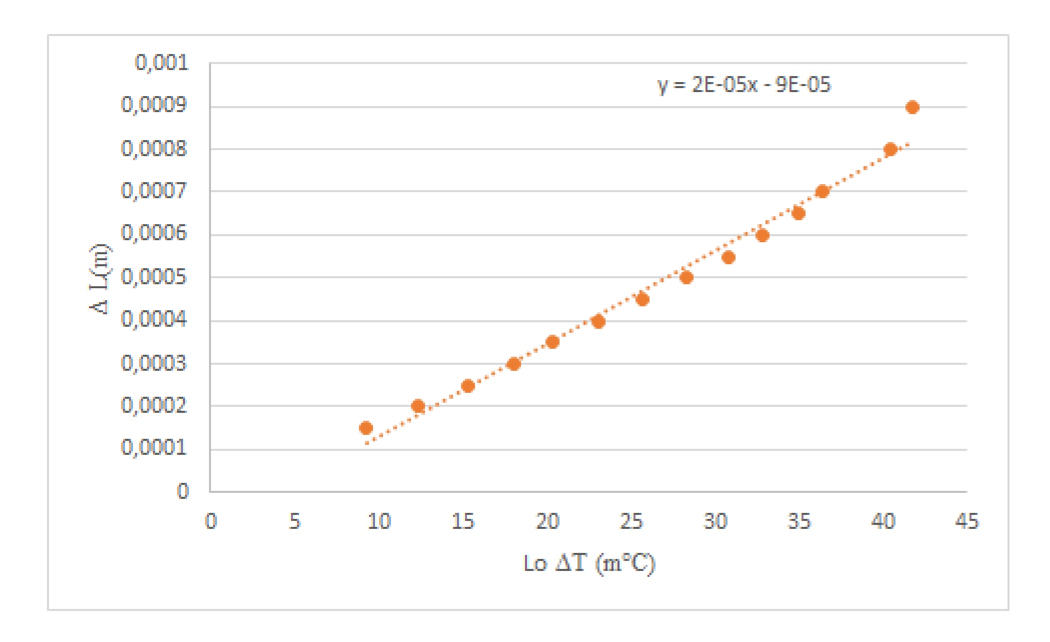



Figura 16: regresión lineal de $\Delta L(m)$ contra $\Delta T L_o$ $(m°C)$

Esto cumple la teoría. Los materiales con los que trabajamos se encuentran hechos de moléculas, éstas, tienen enlaces que las unen con otras para así formar una estructura atómica. Cuando se aplica calor , las moléculas vibran. Como se necesita mayor energía para contraer los enlaces que para estirarlos, entonces los enlaces emplean la mínima energía y se elongan; ahora, ésto pasa con los millones de enlaces de las millones de partículas que componen a nuestro material, así que es congruente que al aplicarle calor a una barra conductora, ésta se elongue.

**Conclusión:**

Se pudieron obtener los valores del coeficiente de dilatación térmica con errores prácticamente bajos. En la práctica se cometión un error que dio pauta el error de cada medición. El error radica en no obtener valores cerrados de la temperatura. Lo que se debe de hacer cuando se toman los datos es tomar la medida del multímetro y después la medida del tornillo micrométrico. La medida del multímetro que se debe de tomar es justamente cuando sea igual a la de alguna de las de la escala dada.

**Referencias:**


1. Bitácora de Ulises Giles Sánchez
2. Prácticas de Francisco Chavez Varela.
3. "Física universitaria Young- Freedman, Sears-Zemansky, editorial Pearson."
4. "Física volumen 1 Resnick decima segunda impresión, editorial Patria."
5. Apuntes del Profesor: Dr. José Antonio Peralta.